

**QEPCAD:
Valós kvantorelimináció
szabad szoftverrel**

Vajda Róbert

*Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
Szeged*

Email address: vajdar@math.u-szeged.hu (Vajda Róbert).

Preprint submitted to

7 October 2010

1 Kvantorelimináció

Döntsük el, hogy az alábbi egyenletrendszernek van-e megoldása (az alaphalmaz \mathbf{R}).

$$\exists_{x,y} (x + y = 1 \wedge x - y = 2)$$

2 Általánosítási lehetőségek

$$(1) \quad \exists_{x,y} (x^2 + y^2 = 5 \wedge x - y = 1)$$

Nemlinearitás!

$$(2) \quad \forall_{x,y} ((x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

Univerzális kvantor is, sőt \forall, \exists kombinációja!

$$(3) \quad \forall_{x,y} \left(\frac{(x + y)^2}{4} \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

Egyenlőtlenség is, gazdag szignatúra!

$$(4) \quad \exists_x (x^2 + a = 0)$$

Nem zárt a formula, nem mondat, nem igaz vagy hamis, hanem a szabad változók függvényében igaz vagy hamis
→ Van olyan formula, ami vele ekvivalens? Igen: $a \leq 0$.

3 Kvantorelimináció

Adott egy elsőrendű formális nyelv $(*, +, =, <, 0, 1)$

A. Tarski: Az 'elemi algebra elméletén' belül minden formulához van egy vele ekvivalens, csak (az eredeti) szabad változókat tartalmazó formula

Mivel az eredeti formulából eltűntek a kvantorok \rightarrow , ezért a formula kvantormentessé vált \rightarrow KVANTORELIMINÁCIÓ!

4 Specifikáció

INPUT: $\phi : Q_1 Q_2 \cdots Q_r (M)$

OUTPUT: ψ , ahol

1) ψ kvantormentes 2) $\psi \equiv_{RQE} \phi$

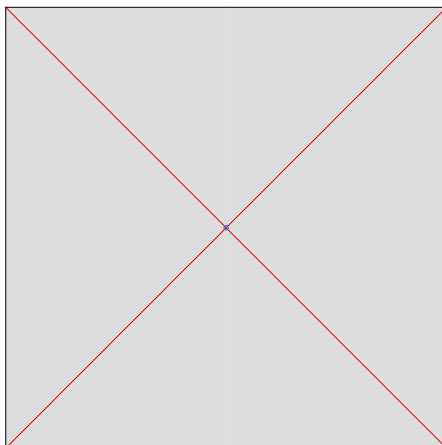
Példa. $\phi : \exists_x (x^2 + a = 0)$

$\psi : (a \leq 0)$

5 Algebra és Geometria

Algebrai halmazok

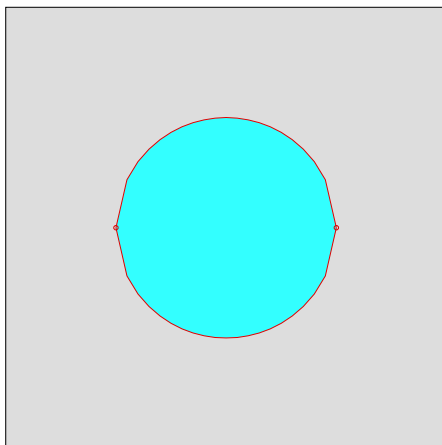
$$\exists_{x,y} (x + y = 1 \wedge x - y = 2)$$



6 Algebra és Geometria

Félalgebrai halmazok

$$\exists_{x,y} (x^2 + y^2 \leq 1)$$

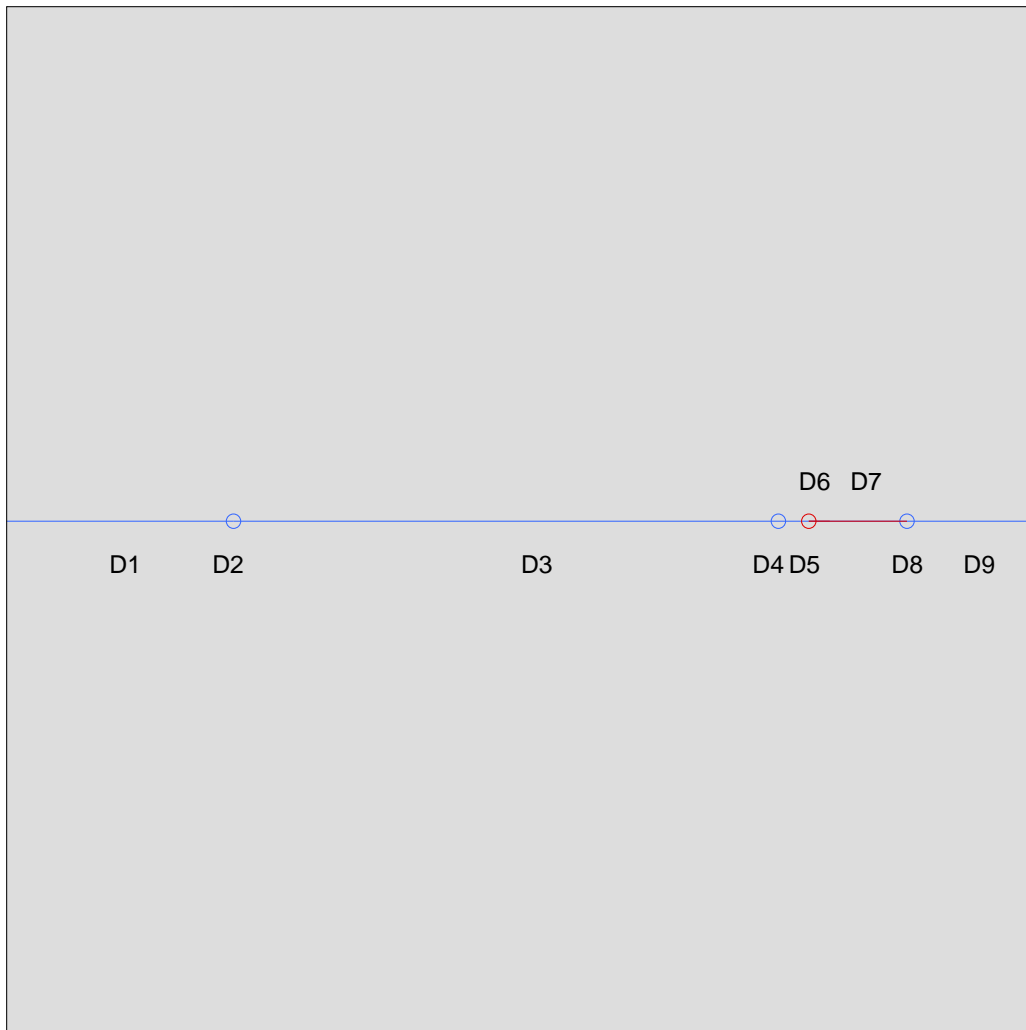


7 Módszer: CAD – Cilindrikus Algebrai Dekompozíció

Speciális eset: 1D-1változó-zárt formula-egz. kvantor

$$\{x^2 - 5, (x - 2)(x - 3)\}$$

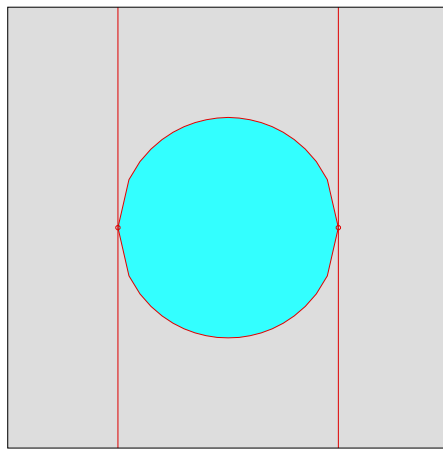
$$\exists_x (x^2 \geq 5 \wedge x^2 - 5x + 7 < 1)$$



8 Módszer: CAD – Cilindrikus Algebrai Dekompozíció

Magasabb dimenziós tér, 3 fázis:

- Projekció
- Számegyenes dekompozíciója, valós gyökizoláció
- Kiterjesztés (Lifting)



9 CAD – Algoritmus bonyolultsága

- Algoritmikus ('effektív') kvantorelimináció
- **Jó hír:** Univerzális eljárás minden problémára, ami ezen a nyelven megfogalmazható
- **Rossz hír:** Nem polinomiális $((2n)^{2^{2r+8}} \dots)$
 r : változók száma, n : polinomok max. fokszáma

10 Történeti áttekintés – QEPCAD

Quantifier **E**limination with **P**artial **C**ylindrical **A**lgebraic **D**ecomposition

- George E. Collins [Fortran, 1970]
- Hoon Hong [C, 1990]
- Christopher W. Brown [C, 2000-2010]

11 Jellemzők

- Download: www.usna.edu/Users/cs/qepcad/B/QEPCAD.html
- Current version: Version B 1.54 (April 15, 2010)
- License: Open-BSD Style License
- 64-bit support

12 Szolgáltatások

- (nem csak) kvantorelimináció
- explicit munka félalgebrai halmazokkal
- formula-egyszerűsítés
- Automatikus 2D CAD ábrakészítés
- kiterjesztett Tarski nyelv használata
- nemstandard kvantorok

13 Alternatívák

- QEPCAD SAGE-en belül
- REDLOG (free, T. Sturm, Reduce része)
- Mathematica (commercial, A. Strzebonski)

14 Program DEMO

=====

Quantifier Elimination
in
Elementary Algebra and Geometry
by
Partial Cylindrical Algebraic Decomposition
Version B 1.54, 15 Apr 2010

=====

Felhasználó megadja a változók sorrendjét + az input formulát.

15 Parancsok és szintaxis

- assume
- finish
- go
- sol T/E
- d-stat
- d-proj-factors
- d-cell
- p-2d-cad

- $(\forall x)$ – Univerzális kvantor
- $(\exists x)$ – Egzisztenciális kvantor
- \wedge, \vee, \implies – Logikai kopulák
- $(\exists x)[x^2 + a = 0]$. – Példaformula

16 Mintaalkalmazások-1

Körpakolás (legegyszerűbb kérdés: milyen kicsi szab. háromszögbe lehet az egységkört belepakolni (a - oldalhossz)?)

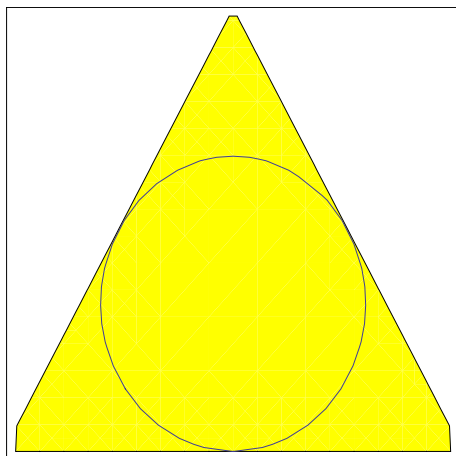
INPUT:

$(Ax) (Ay) [[x^2+(y-1)^2 \leq 1] \implies [y \geq 0 \wedge 3(a-2x)^2 \geq 4y^2 \wedge a-2x \geq 0 \wedge 3(a+2x)^2 \geq 4y^2 \wedge a+2x \geq 0]]$.

OUTPUT:

$a \geq \text{root}_{-1} a^2 - 12$

17 Mintaalkalmazások-1



Legkisebb oldalhossz: $a = 2\sqrt{3}$

18 Mintaalkalmazások-2

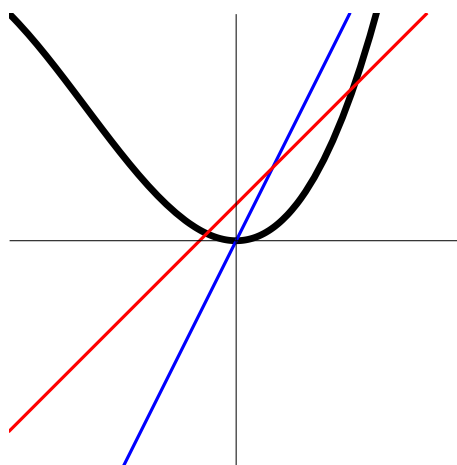
Polinomapproximáció

INPUT:

(Aa1) (Ab1) (Ey) $[-1 \leq y \wedge y \leq 1 \wedge$
 $(x^3 + 2x^2 - a x - b)^2 \leq (y^3 + 2y^2 + a y + b)^2]$.

(Ax) $[-1 \leq x \wedge x \leq 1] \implies [\psi]$.

$$a = 1 \wedge b = \frac{1}{27}(44 - 7\sqrt{7})$$



19 Mintaalkalmazások-3

Ciklusok: logisztikus leképezés, $L_r(x) = rx(1 - x)$.

Melyik r paraméterértékekre van valódi 2-ciklus?

$L_r(L_r(x_0)) = x_0$ második iteráltja

$L_r(x_0) = x_0$ - L_r -nek fixpontja van

$L_r(L_r(x_0)) = x_0$ - L_r -nek van 2-ciklusa

INPUT:

(Ex) $[-1 \leq x \wedge x \leq 1 \wedge r > 0 \wedge r^2 x(1-x)(1-rx(1-x)) = x \wedge rx(1-x) \neq x]$.

OUTPUT:

$r > 3$

References

- [1] Arnon-Collins-McCallum: Cylindrical Algebraic Decomposition I: The Basic Algorithm. In: Caviness-Johnson (eds): Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (pp. 136-151), Springer 1998.
- [2] C. W. Brown. An Overview of QEPCAD B: A Tool for Real Quantifier Elimination and Formula Simplification. *Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation*, 10(1):13-22, 2003.
- [3] C. W. Brown: ISSAC 2004 Tutorial: Cylindrical Algebraic Decomposition.
- [4] G. E. Collins: Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition. In: Caviness-Johnson (eds): Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition (pp. 85-121), Springer 1998.
- [5] A. Dolzmann-T. Sturm-V. Weispfenning: Real Quantifier Elimination in Practice. MIP-9720, Universität Passau, December 1997, *Algorithmic Algebra and Number Theory*, Springer 1998, Matzat, B. H. and Greuel, G.-M. and Hiss, G. (ed.), pp. 221-247.
- [6] G. Kreisel-J.L. Krivine: *Modelltheorie*. Springer, Berlin, 1972
- [7] R. Loos and V. Weispfenning: Applying linear quantifier elimination. *The Computer Journal*, 36(5):450-462, 1993.
- [8] J. Schicho - A. Tesacek: Improved Projection Operator for CAD using Groebner Bases Technical report no. 99-04 in RISC Report Series, University of Linz, Austria. 1999.
- [9] A. Seidl: Extending Real Quantifier Elimination by Cylindrical Algebraic Decomposition to Get Answers. In V. G. Ganzha, E. W. Mayr and E. V. Vorozhtsov, editors, *Proceedings of the Seventh International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2004)*, St. Petersburg, Russia.
- [10] V. Weispfenning: Quantifier elimination for real algebra the quadratic case and beyond *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 1993
- [11] V. Weispfenning: Mixed Real-Integer Linear Quantifier Elimination. ISSAC 1999: pp. 129-136
- [12] F. Winkler: *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer, 1996.